Sous-modules d'unités en théorie d'Iwasawa.

Jean-Robert Belliard

Sous-modules d'unités en théorie d'Iwasawa

Jean-Robert Belliard

Université de Franche-Comté, Laboratoire de mathématiques UMR 6623,
16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, France.

belliard@math.univ-fcomte.fr

10 septembre 2002

Abstract

On donne une condition nécessaire et suffisante, en termes de "descente galoisienne", pour que le module d'Iwasawa obtenu à partir des unités circulaires à la Sinnott soit libre. On détaille ensuite des exemples qui ne satisfont pas à cette condition.

0 Introduction

Soit p un nombre premier impair fixé. Soit K un corps de nombres et K_∞/K une $\mathbb{Z}_p$-extension. On utilise les notations habituelles qui suivent :
$\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Gamma_n := \Gamma^{p^n}$, $G_n := \Gamma/\Gamma_n$ et $K_n := K_\infty^{\Gamma_n}$. Dans toute la suite $\overline{U}_n$ désignera le pro-p-complété du quotient des unités de K_n par les racines de l'unité de K_n et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa usuelle. L'objet de cet article est de dégager une condition nécessaire et suffisante à la liberté du Λ-module $\overline{C}_\infty$ obtenu par passage à la limite projective à partir du pro-p-complété modulo sa torsion du module des unités circulaires de Sinnott ([Si], la définition est rappelée en 2.1 ci-dessous). Ce module est défini lorsque K est abélien sur $\mathbb{Q}$ et c'est un sous-module de $\overline{U}_\infty := \varprojlim \overline{U}_n$.

Dans la première section on redonne une démonstration de critères généraux de Λ-liberté, vraisemblablement connus. La proposition 1.3 fournit un critère suffisamment fin pour conduire à une équivalence si on l'applique au module $\overline{C}_\infty$. Cette équivalence (théorème 2.2) est le résultat principal de ce travail, elle est démontrée dans la deuxième section. La troisième partie illustre le théorème 2.2, par des contre-exemples à la Λ-liberté de $\overline{C}_\infty$. Les cas de Λ-liberté de ce module sont nombreux et connus (on peut consulter par exemple le §1 de [Kuz2], ou [B]). On donne ici une famille infinie d'exemples pour lesquels on démontre que cette liberté n'a pas lieu. D'autres exemples avec la même propriété ont été étudiés indépendamment par R. Kučera ([Kuč]) dans le but d'établir la différence entre

le module des unités cyclotomiques de Sinnott et celui de Washington. En cours de route on établit ici que ces modules sont égaux si et seulement si $\overline{C}_\infty$ est Λ-libre (proposition 3.6).

1 Généralités

1.1 Critères de Λ-liberté

On commence par rappeler deux lemmes tout à fait classiques, dont on redonne une démonstration pour la commodité du lecteur :

Lemme 1.1 *Soit X un Λ-module de type fini. Notons X^Γ (resp. X_Γ) les invariants (resp. co-invariant) de X sous l'action de Γ. Alors X est Λ-libre si et seulement si $X^\Gamma = 0$ et X_Γ est $\mathbb{Z}_p$-libre. Dans ce cas la dimension sur Λ de X est égale à celle de X_Γ sur $\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. L'implication directe est immédiate. on vérifie la réciproque. Considérons une $\mathbb{Z}_p$-base $\{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n\}$ de X_Γ et relevons la en $\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \subset X$. Par le lemme de Nakayama on obtient déjà des générateurs en nombre voulu. De plus toute relation non-triviale entre les x_i conduit en premier lieu à une relation non divisible par T entre ces éléments puisque X est supposé sans T-torsion, puis à une relation non-triviale entre les $\overline{x}_i$.

□

Lemme 1.2 *Soit Y un Λ-module libre de type fini et X un sous-module d'indice fini de Y. Alors X est Λ-libre si et seulement si $X = Y$.*

Démonstration. Puisque $X \subset Y$ on a déjà $X^\Gamma = 0$. Ainsi par le lemme 1.1 X est Λ-libre si et seulement si X_Γ est $\mathbb{Z}_p$ libre. La suite de Γ-cohomologie provenant de la suite courte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Y/X \longrightarrow 0$ fournit la suite exacte $0 \longrightarrow (Y/X)^\Gamma \longrightarrow X_\Gamma \longrightarrow Y_\Gamma$. Donc X_Γ est $\mathbb{Z}_p$-libre si et seulement si $(Y/X)^\Gamma$ est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion c'est-à-dire trivial. Comme Y/X est supposé fini on a les équivalences $Y/X = 0 \iff (Y/X)_\Gamma = 0 \iff (Y/X)^\Gamma = 0$.

□

Avant de donner des applications, on va énoncer un autre critère, un peu moins connu. Pour ce, détaillons le contexte général dans lequel ce critère s'applique, contexte qui se produit très souvent en arithmétique. Il s'agit de la donnée de deux suites, disons $M_n \subset L_n$, de $\mathbb{Z}_p[G_n]$-modules munis, pour $m \geq n$, d'homomorphismes équivariants de *norme* $N_{m,n} \colon L_m \longrightarrow L_n$ et d'*extension* $i_{n,m} \colon L_n \longrightarrow L_m$ tels que :

1) Les restrictions des $N_{n,m}$ et des $i_{m,n}$ définissent des homomorphismes $N_{m,n} \colon M_m \longrightarrow M_n$ et $i_{n,m} \colon M_n \longrightarrow M_m$

2) les composées $i_{n,m} \circ N_{m,n}$ coïncident avec la multiplication par la *trace algébrique* $\mathrm{Tr}_{m,n} := \sum_{g \in \mathrm{Gal}(K_m/K_n)} g \in \mathbb{Z}_p[G_m]$.

3) les composées $N_{m,n} \circ i_{n,m}$ coïncident avec la multiplication par p^{m-n}.

Dans ce contexte on a le critère :

Proposition 1.3 *On suppose que les suites L_n et M_n vérifient les conditions suivantes :*

(*i*) $L_\infty := \varprojlim L_n$ *est Λ-libre.*

(*ii*) *Les homomorphismes $i_{n,m} \colon L_n \longrightarrow L_m^{\mathrm{Gal}(K_m/K_n)}$ sont injectifs.*

(*iii*) *La suite M_n vérifie asymptotiquement la* "descente galoisienne", *(i.e. il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on l'égalité $M_{n+1}^{\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)} = i_{n,n+1}(M_n)$).*

Alors $M_\infty := \varprojlim M_n$ est aussi Λ-libre.

Démonstration. On va appliquer le lemme 1.1 à $X = M_\infty$. Les inclusions $M_n \subset L_n$ donnent par passage à la limite l'inclusion $M_\infty^\Gamma \subset L_\infty^\Gamma$. Puisque L_∞ est supposé Λ-libre on obtient donc $M_\infty^\Gamma = 0$. Ainsi il reste à montrer la liberté du $\mathbb{Z}_p$-module $(M_\infty)_\Gamma$. En appliquant la suite longue de Γ-cohomologie à la suite $0 \longrightarrow M_\infty \longrightarrow L_\infty \longrightarrow L_\infty/M_\infty \longrightarrow 0$ on obtient :

$$0 \longrightarrow (L_\infty/M_\infty)^\Gamma \longrightarrow (M_\infty)_\Gamma \longrightarrow (L_\infty)_\Gamma \cdot$$

La Λ-liberté de L_∞ fournit la $\mathbb{Z}_p$-liberté de $(L_\infty)_\Gamma$, et il suffit donc de montrer que $(L_\infty/M_\infty)^\Gamma$ est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion ou encore que le sous-Λ-module fini maximal de L_∞/M_∞ est trivial. Notons $F_\infty \subset L_\infty/M_\infty$ ce sous-module et posons $F_n \subset L_n/M_n$ pour ses projections naturelles. Par compacité de F_∞ on a $F_\infty = \varprojlim F_n$, et pour conclure la preuve de 1.3 il nous reste à vérifier le :

Lemme 1.4 $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = 0.$

Démonstration de 1.4 . Soit un N vérifiant 1.3 (*iii*). On remarque d'abord que la suite des L_n/M_n, et donc la suite des F_n, est encore munie d'homomorphismes de norme et d'extension que l'on note encore $N_{m,n}$ et $i_{n,m}$ par abus de langage. Puisque F_∞ est fini il existe un $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_{N'}$ agit trivialement sur F_∞. On peut prendre $N' \geq N$. Puisque par définition $F_\infty \longrightarrow F_n$ est surjective $\Gamma_{N'}$ agit aussi trivialement sur tous les F_n. De plus il suffit de vérifier le lemme pour $n \geq N'$. Les ordres des F_n sont bornés, disons par $\#F_\infty = p^b$. Fixons donc $n \geq N'$ et soit $f_n \in F_n$. Il existe alors un $f_{n+b} \in F_{n+b}$ tel que $f_n = N_{n+b,n}(f_{n+b})$ et donc $i_{n,n+b}(f_n) = i_{n,n+b} \circ N_{n+b,n}(f_{n+b}) = \mathrm{Tr}_{n+b,n}(f_{n+b}) = p^b f_{n+b} = 0$. Ainsi F_n est contenu dans le noyau : $F_n \subset \ker\{i_{n,n+b} \colon L_n/M_n \longrightarrow L_{n+b}/M_{n+b}\}$. En appliquant 1.3 (*ii*) et le lemme du serpent dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & L_n/M_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i_{n,n+b}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n,n+b}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n,n+b}} & & \\
0 & \longrightarrow & M_{n+b} & \longrightarrow & L_{n+b} & \longrightarrow & L_{n+b}/M_{n+b} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker\{L_n/M_n \to L_{n+b}/M_{n+b}\} \longrightarrow \ker\{M_{n+b}/M_n \to L_{n+b}/L_n\}\cdot$$

Ce second noyau est trivial puisque par 1.3 (*iii*) on a

$$\ker\{M_{n+b}/M_n \to L_{n+b}/L_n\} = \frac{L_n \cap M_{n+b}}{M_n} \subset \frac{M_{n+b}^{\mathrm{Gal}(K_{n+b}/K_n)}}{M_n} = 0.$$

Cela montre le lemme 1.4 et la proposition 1.3 suit.

□

1.2 Applications

On va appliquer la proposition 1.3 à divers sous-modules d'unités. Lorsqu'elles ont lieu, les propriétés (*ii*) et (*iii*) de 1.3 sont plutôt aisées à vérifier. On a donc besoin de trouver un module Λ-libre qui puisse jouer le rôle de L_∞. Notons $\overline{U}'_n$ le pro-p-complété du module des (p)-unités de K_n (i.e. les nombres de valuations triviales en toute place ne divisant pas p) modulo sa torsion (i.e. modulo les racines de l'unités de K_n). Sous certaines hypothèses, un résultat de Greither montre que $L_n = \overline{U}'_n$ convient. Résumons ce résultat :

Théorème 1.5 ([G3]) *On suppose ou bien que K_∞/K est cyclotomique ou bien que K ne contient pas de racine p-ième de l'unité. Alors $\overline{U}'_\infty := \varprojlim \overline{U}'_n$ est Λ-libre de rang $r_1 + r_2 + g$, où (r_1, r_2) est la signature de K et g est le nombre de places divisant p qui sont totalement décomposées dans K_∞/K .*

Démonstration. Ce sont le théorème et la proposition 1 de [G3], et lorsque K_∞/K est cyclotomique c'est un théorème de Kuz′Min (voir [Kuz1] theorem 7.2)

□

Corollaire 1.6 *Sous les mêmes hypothèses que 1.5, $\overline{U}_\infty := \varprojlim \overline{U}_n$ est Λ-libre.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 1.3 aux modules $M_n = U_n$ et $L_n = U'_n$.

□

Signalons que 1.3 en conjonction avec la conjecture de Leopoldt et un théorème d'Iwasawa (voir [I], theorem 25) permettent de retrouver un cas particulier du théorème 1.5 en prenant pour modules $M_n = \overline{U}'_n$ et pour modules L_n la somme directe des pro-p-complétés des groupes multiplicatifs locaux aux places divisant p.

2 Unités cyclotomiques

Philosophiquement les résultats qui suivent s'appliquent à la distribution d'Iwasawa (voir [BO], §3). Ils s'appliquent donc aux unités de Stark des extensions

abéliennes relatives, dès que ces dernières existent. Ici on se restreint aux extensions abéliennes sur $\mathbb{Q}$ afin de disposer des (nombreuses versions) des unités cyclotomiques. On suppose dorénavant que K est un corps de nombres *absolument abélien*, et on note $\mathcal{G}$ son groupe de Galois. Puisque p est impair on peut aussi supposer, sans perte de généralité, que K est *totalement réel*. Dans ce contexte, le corollaire 1.6 s'applique et fournit la Λ-liberté de $\overline{U}_\infty$. Cela nous permet d'obtenir, pour le module des unités circulaires de Sinnott une réciproque au critère de la proposition 1.3. Rappelons la définition de ce module :

Définition 2.1 ([Si]) *Pour $m \in \mathbb{N}$ on note $\zeta_m = \exp(2i\pi/m)$ la racine primitive $m^{ième}$ de l'unité définie par le choix d'un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$. Soit D le sous-$\mathbb{Z}[\mathcal{G}]$-module de $K^\times$ multiplicativement engendré par -1 et les nombres de la forme $\varepsilon_{K,m,a} = N_{\mathbb{Q}(\zeta_m),K\cap\mathbb{Q}(\zeta_m)}(1-\zeta_m^a)$ où m parcourt $\mathbb{N}$ et $m \nmid a$. Sinnott définit le module des* unités circulaires *de K, noté C_K, comme l'intersection de D avec les unités U_K de K : $C_K = D \cap U_K$. Dans la suite on utilisera les notations suivantes :*

$$\overline{C}_K := C_K \otimes \mathbb{Z}_p, \qquad \overline{C}_n := \overline{C}_{K_n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \qquad \overline{C}_\infty := \varprojlim \overline{C}_n,$$
$$\widetilde{C}_n := \mathrm{Im}(\overline{C}_\infty \xrightarrow{nat} \overline{C}_n), \qquad \varepsilon_{K,m} = N_{\mathbb{Q}(\zeta_m),K\cap\mathbb{Q}(\zeta_m)}(1-\zeta_m) \text{ pour } m > 1$$

Un argument de compacité standard donne l'égalité $\widetilde{C}_n = \bigcap_{m\geq n} N_{K_m,K_n}(\overline{C}_m)$. Les suites de modules $M_n = \overline{C}_n$ et $L_n = \overline{U}'_n$ sont munies des homomorphismes de normes et d'extensions habituels qui vérifient trivialement les conditions 1), 2) et 3) du §1.1 et la condition (ii) de la proposition 1.3. D'après le théorème 1.5, $L_\infty = \overline{U}'_\infty$ vérifie l'hypothèse (i) de la même proposition. On va démontrer l'équivalence suivante :

Théorème 2.2 *Le Λ-module $\overline{C}_\infty$ est libre si et seulement si la suite $M_n = \overline{C}_n$ vérifie la condition (iii) de 1.3, à savoir :*

$$\overline{C}_\infty \text{ est } \Lambda \text{ libre} \iff \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \overline{C}_{n+1}^{\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)} = i_{n,n+1}(\overline{C}_n) \cong \overline{C}_n.$$

Remarque: Dans tous les cas on sait que le Λ-rang du module $\overline{C}_\infty$ est égal à celui de $\overline{U}_\infty$, c'est-à-dire égal à $r_1 = [K : \mathbb{Q}]$, puisque K est totalement réel.

Démonstration. La proposition 1.3 donne l'implication indirecte, on vérifie le sens direct. On suppose donc que $\overline{C}_\infty$ est libre et on va montrer que la suite $\overline{C}_n$ vérifie la propriété (iii) de la proposition 1.3 qu'on appellera dorénavant la "*descente asymptotique*". La première étape du raisonnement consiste à le montrer pour la suite de modules $\widetilde{C}_n$. Pour ce on utilise un lemme dû à Kuz′Min :

Lemme 2.3 ([Kuz1], 7.3) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application naturelle*
$$(\overline{U}'_\infty)_{\Gamma_n} \longrightarrow \overline{U}'_n$$
est injective.

□

Lemme 2.4 *Si $\overline{C}_\infty$ est Λ-libre alors $\widetilde{C}_n$ vérifie la descente asymptotique.*

On pose $Q_\infty := \overline{U}'_\infty/\overline{C}_\infty$. Le lemme du serpent donne alors la suite pour tout n : $0 \longrightarrow Q_\infty^{\Gamma_n} \longrightarrow (\overline{C}_\infty)_{\Gamma_n} \longrightarrow (\overline{U}'_\infty)_{\Gamma_n}$. Le lemme 2.3 et le diagramme commutatif qui suit permettent donc d'identifier $(Q_\infty)^{\Gamma_n}$ avec le noyau de descente : $(Q_\infty)^{\Gamma_n} \simeq \ker\Big((\overline{C}_\infty)_{\Gamma_n} \twoheadrightarrow \widetilde{C}_n\Big)$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow (Q_\infty)^{\Gamma_n} & \longrightarrow & (\overline{C}_\infty)_{\Gamma_n} & \longrightarrow & (\overline{U}'_\infty)_{\Gamma_n} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \widetilde{C}_n & \hookrightarrow & \overline{U}'_n \end{array}$$

Par noethérianité les noyaux $(Q_\infty)^{\Gamma_n}$ se stabilisent et valent pour n grand $(Q_\infty)^{\Gamma_n} = (Q_\infty)^{\Gamma_N}$, où N est un entier fixé. Ainsi pour tout $n \geq N$ on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow (Q_\infty)^{\Gamma_N} \longrightarrow (\overline{C}_\infty)_{\Gamma_n} \longrightarrow \widetilde{C}_n \longrightarrow 0$$

Par hypothèse $\overline{C}_\infty$ est Λ-libre donc $(\overline{C}_\infty)_{\Gamma_n}$ est $\mathbb{Z}_p[G_n]$-libre. En outre le groupe $\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)$ agit trivialement sur le $\mathbb{Z}_p$-module libre $(Q_\infty)^{\Gamma_N}$ puisque $n \geq N$. On en déduit la trivialité du $0^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie modifié à la Tate

$$\widehat{H}^0(K_{n+1}/K_n, \widetilde{C}_n) \simeq H^1(K_{n+1}/K_n, (Q_\infty)^{\Gamma_N}) = 0.$$

Mais par définition des module $\widetilde{C}_n$ la norme $N_{n+1,n} \colon \widetilde{C}_{n+1} \longrightarrow \widetilde{C}_n$ est surjective. On obtient donc les égalités

$$(\widetilde{C}_{n+1})^{\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)} = \mathrm{Tr}_{n+1,n}(\widetilde{C}_{n+1}) = i_{n+1,n} \circ N_{n+1,n}(\widetilde{C}_{n+1}) = i_{n+1,n}(\widetilde{C}_n).$$

□

Pour conclure la preuve de 2.2 on doit maintenant passer de $\widetilde{C}_n$ à $\overline{C}_n$. Le lemme suivant montre que la déviation entre ces deux modules est asymptotiquement constante :

Lemme 2.5 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit I_n le corps d'inertie en p de K_n (i.e. le plus grand sous-corps de K_n dans lequel p ne se ramifie pas). Alors on a*

$$\overline{C}_n = \overline{C}_{I_n}\ \widetilde{C}_n.$$

La suite de corps I_n est manifestement stationnaire et si I désigne le corps d'inertie de p dans K_∞ on a l'égalité pour tout n tel que $I \subset K_n$:

$$\overline{C}_n = \overline{C}_I\ \widetilde{C}_n$$

Démonstration. La seconde égalité est une conséquence directe de la première. L'inclusion $\overline{C}_{I_n}\ \widetilde{C}_n \subset \overline{C}_n$ est immédiate. On montre l'inclusion réciproque. Soit $u \in \overline{C}_n$. Par définition u est une unité de la forme :

$$u = \prod_{m>2} \varepsilon_{K_n,m}^{x_m},$$

où les $x_m \in \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})]$ sont presque tous nuls. On commence par séparer le produit ci-dessus selon la divisibilité de m par p. On obtient :

$$u = \left(\prod_{m>2, p\nmid m} \varepsilon_{K_n,m}^{x_m} \right) \left(\prod_{p\nmid m', a>0} \varepsilon_{K_n,p^a m'}^{x_{p^a m'}} \right).$$

Montrons que le terme $\prod \varepsilon_{K_n,m}^{x_m}$ appartient à $\overline{C}_{I_n}$. Soit R l'ensemble des places ramifiées dans $I_n/\mathbb{Q}$ (remarquer que $p \notin R$). Si $p \nmid m$ alors p n'est pas ramifié dans $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ donc les nombres de la forme $\varepsilon_{K_n,m}$ sont des R-unités de I_n, tandis que les nombres de la forme $\varepsilon_{K_n,p^a m'}$ sont des p-unités de K_n. Comme il ne peut pas y avoir de compensation entre les valuations au-dessus de R et celle au-dessus de p, pour que u soit une unité on a nécessairement $\prod \varepsilon_{K_n,m}^{x_m} \in \overline{U}_n$ et $\prod \varepsilon_{K_n,p^a m'}^{x_{p^a m'}} \in \overline{U}_n$. Puisque $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap K_n$ est contenu dans I_n dès que $p \nmid m$, on en déduit $\prod_{m>2, p\nmid m} \varepsilon_{K_n,m}^{x_m} \in \overline{C}_{I_n}$.

Il reste à montrer que le terme $\prod_{m',a>0} \varepsilon_{K_n,p^a m'}^{x_{p^a m'}} \in \overline{U}_n$ appartient en fait à $\widetilde{C}_n$, et par récurrence sur n il suffit de vérifier que cette unité est la norme d'une unité de K_{n+1} de la même forme. Séparons à nouveau ce produit comme suit :

$$\prod_{p\nmid m', a>0} \varepsilon_{K_n,p^a m'}^{x_{p^a m'}} = \left(\prod_{a>0} \varepsilon_{K_n,p^a}^{x_{p^a}} \right) \left(\prod_{p\nmid m', m'>1, a>0} \varepsilon_{K_n,p^a m'}^{x_{p^a m'}} \right).$$

Et posons :

$$y := \left(\prod_{a>0} \varepsilon_{K_n,p^a}^{x_{p^a}} \right) \quad \text{et} \quad z := \left(\prod_{p\nmid m', m'>1, a>0} \varepsilon_{K_n,p^a m'}^{x_{p^a m'}} \right)$$

Par le lemme 2.1 (i) de [So] les nombres cyclotomiques $(1-\zeta_m)$ vérifient les relations de distributions suivantes (pour $r>2$, $r \mid s$ et en notations additives):

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_s),\mathbb{Q}(\zeta_r)}(1-\zeta_s) = \left(\prod_{l\mid s, l\nmid r} (1-\sigma_l^{-1}) \right)(1-\zeta_r) \tag{1}$$

où l parcourt l'ensemble des nombres premiers divisant s et pas r et où σ_l désigne le Frobenius en l de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_s)/\mathbb{Q})$. Écrivons $\mathrm{cond}(K_n) = p^c k$ avec $p \nmid k$. Alors par l'équation (1), y est une puissance galoisienne de l'uniformisante cyclotomique ε_{K_n,p^c} tandis que z est une unité. Donc y est aussi une unité et peut s'écrire $y = \varepsilon_{K_n,p^c}^t$ avec t dans l'idéal d'augmentation de l'anneau $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^c}) \cap K_n/\mathbb{Q})]$. Comme l'équation (1) donne aussi l'identité $\varepsilon_{K_n,p^c} = N_{K_{n+1},K_n}(\varepsilon_{K_{n+1},p^{c+1}})$, on a bien $y \in \widetilde{C}_n$.

Pour conclure vérifions que chaque terme de la forme $\varepsilon_{K_n,p^a m'}$ avec $a>0$ et $m'>1$ est norme d'unité circulaire de K_{n+1}. Soit $F = \mathbb{Q}(\zeta_{p^a m'}) \cap K_n$, F_1 le premier étage de la $\mathbb{Z}_p$-tour sur F, et soient f et f_1 leurs conducteurs respectifs. Par l'équation (1) on voit que $\varepsilon_{K_n,p^a m'}$ est une puissance galoisienne de $\varepsilon_{F,f}$ si

$p \mid f$ ou de $\varepsilon_{F,f}^{1-\sigma_p^{-1}}$ si $p \nmid f$. Comme en outre seules les places au-dessus de p sont éventuellement ramifiées dans l'extension F_1/F la même équation donne aussi :

$$N_{F_1/F}(\varepsilon_{F_1,f_1}) = \begin{cases} \varepsilon_{F,f} & \text{si} \quad p \mid f \\ \varepsilon_{F,f}^{1-\sigma_p^{-1}} & \text{si} \quad p \nmid f \end{cases}$$

Si F_1 n'est pas contenu dans K_n alors on a $F_1 \subset K_{n+1}$, puis $N_{K_{n+1},K_n}(\varepsilon_{F_1,f_1}) = N_{F_1,F}(\varepsilon_{F_1,f_1})$ et la preuve est terminée. Sinon comme $\widetilde{C}_n$ est un module galoisien il suffit de montrer que $\varepsilon_{F_1,f_1} \in \widetilde{C}_n$ ce qui conduit à terme au cas précédent.

□

On reprend la preuve du théorème 2.2. Fixons un n suffisamment grand pour avoir $I \subset K_n$. Alors on a $\overline{C}_I^{\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)} = \overline{C}_I$ dont on déduit :

$$\begin{aligned} \overline{C}_{n+1}^{\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)} &= \left(\overline{C}_I \ \widetilde{C}_{n+1}\right)^{\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)} = \overline{C}_I \left(\widetilde{C}_{n+1}\right)^{\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)} \\ &= \overline{C}_I \widetilde{C}_n = \overline{C}_n \ . \end{aligned}$$

Ce qui démontre le théorème 2.2.

□

3 Exemples et contre-exemples

A partir du théorème 2.2 qui donne une équivalence, il est naturel de se demander si les deux alternatives peuvent effectivement se produire. Lorsque le corps K est le sous-corps réel maximal d'un corps cyclotomique, on sait par des résultats sur les distributions à la Kubert-Lang que $\overline{C}_\infty$ est Λ-libre (voir par exemple [Kuz2]). Plus généralement, par un passage à la limite immédiat, on peut déduire de [B] une condition suffisante et d'autres exemples où $\overline{C}_\infty$ est Λ-libre. D'autre part on sait que les unités circulaires à la Sinnott ne vérifient pas toujours la "descente galoisienne" c'est-à-dire qu'il existe des corps abéliens $F \subset L$ tels que $C_F \subsetneq C_L \bigcap F$ (voir [G2]). En particulier 2.2 n' entraîne pas la liberté de $\overline{C}_\infty$: on va présenter une liste d'exemples de corps K pour lesquels cette liberté n'a pas lieu. Pour produire ces contre-exemples on va utiliser des hypothèses de décomposition assez contraignantes dans le style de [G2]. Ces hypothèses permettent de mieux contrôler la structure galoisienne des unités circulaires et simplifient notablement les calculs qui suivent. Ce fait justifie la terminologie *"günstige* $(p+1)$*-tuple"* de [G2]. Énonçons ces conditions. A partir d'ici, et jusquà la fin de ce paragraphe, on suppose que le corps de nombres abélien K et le nombre premier p vérifient les trois conditions suivantes :

1– le conducteur de K est le produit sans facteurs carrés $f_K = \prod_{i=1}^{i=p+1} l_i$ de $p+1$ nombres premiers l_i tels que $l_i \equiv 1[p]$ et pour chaque $j \neq i$ il existe un entier $x_{i,j}$ tel que $l_i \equiv x_{i,j}^p [l_j]$.

2– $\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$

3– Notons $K^1, K^2, \ldots, K^{p+1}$ les $(p+1)$ sous-corps non triviaux de K. On suppose en outre que quitte à renuméroter ces sous-corps, leur conducteur vaut :

$$\mathrm{cond}(K^j) = \prod_{i=1, i\neq j}^{i=p+1} l_i$$

Remarque :

(*i*) En reprenant le raisonnement de [G2] qui s'appuie sur le théorème de densité de Čebotarev on peut démontrer l'existence (d'une infinité) de $(p+1)$-uples de premier $(l_i)_{i=1}^{p+1}$ tels que p et tout sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{\prod l_i})$ vérifient la condition 1. Ce sont de tels $(p+1)$-uples qui furent dénommés *günstige* $(p+1)$*-tuple* dans [G2].

(*ii*) Ensuite étant fixé un tel günstige $(p+1)$-uple $l_1, \ldots, l_{p+1}$ on peut vérifier que $\mathbb{Q}(\zeta_{\prod l_i})$ contient un sous-corps K vérifiant 2- et 3- : c'est un exercice sur les groupes abéliens laissé au lecteurs.

(*iii*) Alternativement l'exemple du §IV.2 de [B] vérifie les conditions ci-dessus pour $p = 3$.

La condition 3– entraîne que les Frobenius $\left(\frac{l_i}{K^i/\mathbb{Q}}\right)$ sont des éléments bien définis de $\mathrm{Gal}(K^i/\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(K^i_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$. De plus ces Frobenius sont triviaux par la condition 1– :

4– $\forall i, 1 \leq i \leq p+1 \quad : \quad \left(\frac{l_i}{K^i/\mathbb{Q}}\right) = \left(\frac{l_i}{K^i_\infty/\mathbb{Q}_\infty}\right) = 1.$

Avec toutes ces hypothèses on va démontrer :

Théorème 3.1 *$\overline{C}_\infty$ n'est pas Λ-libre.*

Démonstration. On commence par se donner un système de générateurs galoisiens de $\overline{C}_\infty$. Pour tout corps abélien F, de conducteur f disons, on note ε_F le nombre cyclotomique

$$\varepsilon_F = \varepsilon_{F,f} = N_{\mathbb{Q}(\zeta_f),F}(1-\zeta_f)$$

On désignera par ε^i_∞ (pour $1 \leq i \leq p+1$), $\varepsilon^{\mathbb{Q}}_\infty$ et ε^K_∞ les éléments suivants de $\overline{C}_\infty$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^i_\infty &:= (N_{K^i_1,K^i}(\varepsilon_{K^i_1}), \varepsilon_{K^i_1}, \ldots, \varepsilon_{K^i_n}, \ldots)_{n\geq 1} \\ \varepsilon^{\mathbb{Q}}_\infty &:= (\gamma-1)(p, \varepsilon_{\mathbb{Q}_1}, \ldots, \varepsilon_{\mathbb{Q}_n}, \ldots)_{n\geq 1} \\ \varepsilon^K_\infty &:= (N_{K_1,K}(\varepsilon_{K_1}), \varepsilon_{K_1}, \ldots, \varepsilon_{K_n}, \ldots)_{n\geq 1} \end{aligned} \quad .$$

A partir du lemme 2.3 de [G1] on peut vérifier le lemme suivant (remarquer cependant que les générateurs utilisés ici diffèrent de ceux de [G1] par des inversibles de $\Lambda[\mathcal{G}]$) :

Lemme 3.2 *Le système $(\varepsilon^I_\infty)_I$, où I parcourt l'ensemble $\{K, \mathbb{Q}, 1, 2, \ldots, p+1\}$, engendre $\overline{C}_\infty$ sur $\Lambda[\mathcal{G}]$.*

□

Par un passage à la limite projective le long de la $\mathbb{Z}_p$-tour sur l'équation (1) on obtient les relations (en notation additive) :

$$\left(R_1^{(i)}\right) : Tr_{K_\infty,K_\infty^i}(\varepsilon_\infty^K) = \left(1 - \left(\frac{l_i}{K_\infty^i/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)\varepsilon_\infty^i$$

$$\left(R_2^{(i)}\right) : Tr_{K_\infty^i,\mathbb{Q}_\infty}(\varepsilon_\infty^i) = \left(\frac{1}{\gamma-1}\prod_{j\neq i}\left(1 - \left(\frac{l_j}{\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)\right)\varepsilon_\infty^{\mathbb{Q}}$$

Où $Tr_{F,L}(x) = (\sum_{g\in \mathrm{Gal}(F/L)} g)x$ désigne la trace algébrique définie pour toute extension galoisienne finie F/L. A priori tous les termes $\left(1 - \left(\frac{l_i}{K_\infty^i/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)$ appartiennent à $\Lambda[\mathrm{Gal}(K^i/\mathbb{Q})]$. Mais grâce à 4–, ces facteurs sont en fait des éléments de $\mathbb{Z}_p[\Gamma] \subset \Lambda$. En combinant n'importe quel couple de relations avec le même i on obtient :

$$(R_3) : Tr_{K_\infty,\mathbb{Q}_\infty}(\varepsilon_\infty^K) = \left(\frac{1}{\gamma-1}\prod_{i=1}^{i=p+1}\left(1 - \left(\frac{l_j}{\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)\right)\varepsilon_\infty^{\mathbb{Q}}.$$

A l'aide de l'identité formelle $p = -Tr_{K_\infty,\mathbb{Q}_\infty} + \sum_{i=1}^{i=p+1} Tr_{K_\infty,K_\infty^i}$, des relations $(R_1^{(i)})$ et (R_3) on obtient une autre relation utile :

$$\begin{aligned}(R_4) : p(\varepsilon_\infty^K) = &\left(-\frac{1}{\gamma-1}\prod_{i=1}^{i=p+1}\left(1 - \left(\frac{l_j}{\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)\right)\varepsilon_\infty^{\mathbb{Q}} \\ &+ \sum_{i=1}^{i=p+1}\left(1 - \left(\frac{l_i}{K_\infty^i/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)\varepsilon_\infty^i\end{aligned}$$

On considère maintenant le sous-$\Lambda[\mathcal{G}]$-module de $\overline{C}_\infty$, disons $\mathfrak{S}_\infty$, engendré par tous les ε_∞^I sauf ε_∞^K :

$$\mathfrak{S}_\infty := \left\langle \left\{\varepsilon_\infty^I, I = \mathbb{Q}, 1, \ldots, p+1\right\}\right\rangle$$

On note $\mathfrak{Q}_\infty$ le quotient

$$\mathfrak{Q}_\infty := \overline{C}_\infty/\mathfrak{S}_\infty$$

Bien sur $\mathfrak{Q}_\infty$ est $\Lambda[\mathcal{G}]$-monogène, engendré par $\varepsilon_\infty^K + \mathfrak{S}_\infty$, et tué par p à cause de (R_4). Il suit que $\mathfrak{S}_\infty$ a le même Λ-rang que $\overline{C}_\infty$, à savoir p^2. Par un choix approprié de Λ-base on peut voir que $\mathfrak{S}_\infty$ est Λ-libre :

Lemme 3.3 *Soit g_i un générateur de* $\mathrm{Gal}(K^i/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(K_\infty^i/\mathbb{Q}_\infty) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Alors l'ensemble qui suit forme une Λ-base du Λ-module libre $\mathfrak{S}_\infty$:

$$\left\{\begin{array}{cccc} & & \varepsilon_\infty^{\mathbb{Q}}, & \\ \varepsilon_\infty^1, & g_1\varepsilon_\infty^1, & \dots, & g_1^{p-2}\varepsilon_\infty^1, \\ \varepsilon_\infty^2, & g_2\varepsilon_\infty^2, & \dots, & g_2^{p-2}\varepsilon_\infty^2, \\ & & \vdots & \\ & & g_i^j\varepsilon_\infty^i, & \\ & & \vdots & \\ \varepsilon_\infty^{p+1}, & g_{p+1}\varepsilon_\infty^{p+1}, & \dots, & g_{p+1}^{p-2}\varepsilon_\infty^{p+1} \end{array}\right\}$$

Démonstration. On a choisi $1+(p+1)(p-1)=p^2$ éléments de $\mathfrak{S}_\infty$ donc il suffit de vérifier que ces éléments forment un système générateur. En fait à partir du système générateur de la définition de $\mathfrak{S}_\infty$ on a seulement retiré un conjugué de chaque ε_∞^i, et la relation (R_2^i) permet d'écrire ce conjugué comme combinaison linéaire des autres conjugués et de $\varepsilon_\infty^{\mathbb{Q}}$.

□

Lemme 3.4 $\mathfrak{Q}_\infty \neq \{0\}$

Démonstration. Cela équivaut à $\varepsilon_\infty^F \notin \mathfrak{S}_\infty$, qui revient aussi à $p\varepsilon_\infty^F \notin p\mathfrak{S}_\infty$. Mais la relation (R_4) donne les coefficients de $p\varepsilon_\infty^F$ dans la base de $\mathfrak{S}_\infty$ du lemme 3.3 :

$$\begin{aligned} p(\varepsilon_\infty^K) = &\left(-\frac{1}{\gamma-1}\prod_{i=1}^{i=p+1}\left(1-\left(\frac{l_j}{\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)\right)\varepsilon_\infty^{\mathbb{Q}} \\ &+\sum_{i=1}^{i=p+1}\left(1-\left(\frac{l_i}{K_\infty^i/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)\varepsilon_\infty^i \end{aligned}$$

Or les termes de la forme $\left(1-\left(\frac{l_i}{K_\infty^i/\mathbb{Q}}\right)^{-1}\right)$ appartiennent à Λ et sont premiers à p.

□

On est maintenant armé pour donner explicitement un élément d'ordre p dans $(\overline{C}_\infty)_\Gamma$.

Lemme 3.5 *$\varepsilon_\infty^K + (\gamma-1)\overline{C}_\infty$ est d'ordre p dans $(\overline{C}_\infty)_\Gamma$.*

Démonstration. En usant à nouveau de la relation (R_4) on constate que $p\varepsilon_\infty^K \in (\gamma-1)\overline{C}_\infty$. Il reste donc à vérifier que ε_∞^K lui-même n'appartient pas $(\gamma-1)\overline{C}_\infty$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \overline{C}_\infty & \twoheadrightarrow & \mathfrak{Q}_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\overline{C}_\infty)_\Gamma & \twoheadrightarrow & (\mathfrak{Q}_\infty)_\Gamma \end{array}$$

Il suffit de montrer que $\varepsilon_\infty^K + (\gamma-1)\overline{C}_\infty$ ne s'envoie pas sur 0 dans $(\mathfrak{Q}_\infty)_\Gamma$.

Mais par définition de $\mathfrak{Q}_\infty$, les conjugués $g\varepsilon_\infty^K$ pour $g \in \mathcal{G}$ l'engendrent, de sorte que leurs images engendrent $(\mathfrak{Q}_\infty)_\Gamma$. Et comme $\mathcal{G}$ agit par automorphisme sur $(\mathfrak{Q}_\infty)_\Gamma$, les conjugués $g\varepsilon_\infty^F$ s'envoient simultanément sur 0 ou non. Ainsi $\varepsilon_\infty^F \in (\gamma - 1)\overline{C}_\infty$ contredirait, par le lemme de Nakayama, le lemme 3.4. Ceci prouve le lemme 3.5 et le théorème 3.1.

□

Par une autre construction R. Kučera dans [Kuč] donne un corps de nombre K pour lequel les unités circulaires à la Sinnott diffèrent au niveau infini des *unités cyclotomiques à la Washington* (avec $p = 3$; voir [KN] et [Kuč] pour la terminologie "unités de Washington"). Notons $\overline{C}_n^W$ le tensorisé avec $\mathbb{Z}_p$ des unités cyclotomique de K_n à la Washington, et $\overline{C}_\infty^W$ leur limite projective. Par construction et avec le corollaire 1 de [GK] les unités de Washington vérifient la "descente galoisienne". Ce module $\overline{C}_\infty^W$ est donc Λ-libre par la proposition 1.3. On a alors :

Proposition 3.6 *$\overline{C}_\infty$ est Λ-libre si et seulement si $\overline{C}_\infty = \overline{C}_\infty^W$.*

Démonstration. D'après le résultat principal de [KN] le quotient $\overline{C}_\infty^W/\overline{C}_\infty$ est fini. La proposition suit donc du lemme 1.2.

□

La construction de [Kuč] fournit donc un autre exemple où $\overline{C}_\infty$ n'est pas Λ-libre. Dans cet exemple $7 = 2p + 1$ nombres premiers sont ramifiés dans K. Dans la famille d'exemples détaillés ici, avec $p = 3$, on obtient 4 nombres premiers ramifiés. D'après [B] on sait que si 2 nombres premiers (au plus) sont ramifiés dans K alors $\overline{C}_\infty$ est Λ-libre. Actuellement dans le cas particulier où exactement 3 nombres premiers distincts de p sont ramifiés dans le corps de base K on ne dispose ni de preuve de la Λ-liberté de $\overline{C}_\infty$ ni de contre-exemple.

Références

[B] Jean-Robert Belliard, *Sur la structure galoisienne des unités circulaires dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J. Number Theory **69** (1998), no. 1, 16–49.

[BO] Jean-Robert Belliard and Hassan Oukhaba, *Sur la torsion de la distribution ordinaire universelle attachée à un corps de nombres*, Manuscripta Math. **106** (2001), no. 1, 117–130.

[GK] Robert Gold and Jae Moon Kim, *Bases for cyclotomic units*, Compositio Math. **71** (1989), no. 1, 13–27.

[G1] Cornelius Greither, *Class groups of abelian fields, and the main conjecture*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), no. 3, 449–499.

[G2] Cornelius Greither, *Über relativ-invariante Kreiseinheiten und Stickelberger-Elemente*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 1, 27–43.

[G3] Cornelius Greither, *Sur les normes universelles dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), no. 2, 205–220.

[I] Kenkichi Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 246–326.

[KN] Radan Kučera and Jan Nekovář, *Cyclotomic units in $\mathbf{Z}_p$-extensions*, J. Algebra **171** (1995), no. 2, 457–472.

[Kuč] Radan Kučera, *A Note on Circular Units in $\mathbf{Z}_p$-extensions*, preprint (2002).

[Kuz1] L. V. Kuz′min, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 267–327.

[Kuz2] L. V. Kuz′min, *On formulas for the class number of real abelian fields*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **60** (1996), no. 4, 43–110.

[Si] Warren Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field*, Invent. Math. **62** (1980), no. 2, 181–234.

[So] David Solomon, *On a construction of p-units in abelian fields*, Invent. Math. **109** (1992), no. 2, 329–350.

[W] Lawrence C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1997.